ЛЕКЦИЯ-8

§3. Бірнеше айнымалы функциялардың туындылары және дифференциалдануы.

Айталық, $z=f(x,y)$ функциясы R^2 кеңістігінің D облысында анықталсын. Осы облыстан қайсыбір (x,y) нүктесін алып, x нүктесіне Δx өсімшесін $x+\Delta x\in D$ етіп береміз. Сәйкес функция өсімшесін дербес өсімше деп атайды, оны

$$\Delta z_x = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

деп белгілейміз.

Осы сияқты, y нүктесіне Δy өсімшесін $y+\Delta y\in D$ беріп дербес өсімшесін аламыз

$$\Delta z_y = f(x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

Анықтама. Егер шекті шектер бар болса

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x} \quad \text{және} \quad \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y},$$

оларды сәйкес $z=f(x,y)$ функциясының x және y айнымалылары бойынша алынған дербес туындылары деп атайды да сәйкес төмендегі символдардың біреуімен белгілейді:

$$z'_x,\ z_y{}' \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y};$$

$$f'_x,\ f'_y \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y};$$

Айталық $u=f(x,y,z)$ функциясы R^3 кеңістігінің D облысында анықталсын, қайсыбір . $M(x,y,z)\in D$ нүктесін алып x аргументіне Δx өсімшесін $(x+\Delta x, y, z)\in D$ береміз де сәйкес функцияның дербес өсімшесін аламыз

$$\Delta u_x = f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)$$

Дәл осылай y,z аргументтеріне сәйкес $\Delta y,\Delta z$ өсімшелерін беріп, функцияның дербес өсімшелерін анықтаймыз

$$\Delta u_y = f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z),$$

$$\Delta u_z = f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z).$$

Егер шекті шектер бар болса:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u_x}{\Delta x},\ \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta u_y}{\Delta y},\ \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta u_z}{\Delta z}$$

оларды $u=f(x,y,z)$ функциясының сәйкес x,y,z айнымалылары бойынша алынған дербес туындылары деп атап, төмендегі символдардың біреуі мен белгілейді:

$$u'_x,\ u'_y, u'_z \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$f'_x,\ f'_y,\ f'_z \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Егер $M(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ нүктесі $u=f(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n)$ функциясы анықталған $D\subset R^n$ облысының ішкі нүктесі болса, онда оның дербес өсімшелері

$$\Delta u_{x_k} = f(x_1,\ldots\ldots,x_{k-1},x_k+\Delta x_k,x_{k+1},\ldots.,x_n) - f(x_1,\ldots\ldots,x_{k-1},x_k,x_{k+1},\ldots.,x_n)$$

анықталады.

Егер шекті шектер

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\frac{\Delta u_{x_k}}{\Delta x_k}$$

бар болса, оларды $u=f(x_1,\ldots.,x_k,\ldots.,x_n)$ функциясының x_k айнымалысы бойынша дербес туындылары деп атайды да, төмендегі символдардың біреуімен белгілейді:

$$u'_{x_k},\ f'_{x_k} \quad \text{немесе} \quad \frac{\partial u}{\partial x_k},\frac{\partial f}{\partial x_k}.$$

§4. Функция дифференциалы және екі айнымалы функция дифференциалдануының геометриялық мағынасы

Егер $z = f(x, y)$ функциясы $M(x, y)$ нүктесінде дифференциалданатын болса, оның толық өсімшесі

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y \qquad (1)$$

өрнектелетіні белгілі, мұндағы $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y),\ \varepsilon_2 = \varepsilon_2(\Delta x, \Delta y)$ шексіз аз шамалар және $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$ да $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2$ нөлге ұмтылады.

Анықтама. $z = f(x, y)$ функциясының дифференциалы деп, оның толық өсімшенің Δx пен Δy қарай негізгі сызықты бөлігін атайды, оны dz белгілейді:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

немесе

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \qquad (2)$$

Егер $z = x$ болса, онда $dz = dx = \Delta x,\ z = y$ болса, $dz = dy = \Delta y$ болғандықтан (2) формуладан

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \qquad (3)$$

аламыз.

Егер функция үш айнымалыдан тәуелді болса, $u = f(x, y, z)$, оның дифференциалы төмендегі түрде жазылады:

$$du = u'_x(x, y, z)dx + u'_y(x, y, z)dy + u'_z(x, y, z)dz \qquad (4)$$

(1) және (3) формуладан

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y$$

аламыз.

Аргументтердің өсімшелері шексіз аз болғанда функцияның толық өсімшесін жуықтап, оның дифференциалы арқылы есептеуге болады:

$$\Delta z \approx dz$$

Бұл өрнекті төмендегі түрде жазайық:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \approx f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$$

немесе

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y. \qquad (5)$$

(5) формула $f(x, y)$ функциясының мәнін қолданып, $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ жуықтап есептеуде кеңінен қолданылады.